WIKIPÉDIA

# Relação de equivalência

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Uma **relação de equivalência** é uma relação binária entre elementos de um dado conjunto, que satisfaz as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade.[1]

De forma mais rigorosa, uma **relação de equivalência** num conjunto *X* é uma relação binária que é reflexiva, simétrica e transitiva:

$$\forall a \in X,\ aRa \text{ (reflexividade)}$$
$$\forall a, b \in X,\ aRb \Rightarrow\ bRa \text{ (simetria)}$$
$$\forall a, b, c \in X,\ a\,R\,b \wedge b\,R\,c\ \Rightarrow a\,R\,c \text{ (transitividade)}$$

Uma **relação de equivalência** permite particionar o conjunto em classes de equivalência;[1] esta construção é muito importante para gerar vários conjuntos quocientes, como grupos quocientes ou topologias quocientes. A ideia é partir de um conjunto, em princípio mais complicado, *X* e tentar criar um outro conjunto *Y*, mais simples, que vê elementos distintos de *X* como iguais. Então, estudando-se o conjunto mais simples *Y* pode-se tirar conclusões sobre *X*.

Descobrir relações de equivalência é fundamental para os matemáticos entenderem certas classes de objetos. Como exemplos, temos a congruência dos inteiros ("descoberta" por Gauss), que é ferramenta básica para entendermos certos teoremas em Teoria dos Números, e a congruência de triângulos (conhecida desde Euclides), importante pilar da geometria.

## Exemplos

- O produto cartesiano de um conjunto *A* com ele mesmo, $A \times A$ é uma relação de equivalência.
- A relação em *A* definida por $xRy \iff x = y$ (a *diagonal* do produto cartesiano, ou o gráfico da função identidade) é uma relação de equivalência.
- A interseção de uma quantidade não-vazia de relações de equivalência é uma relação de equivalência. Isso permite definir a *menor* relação de equivalência satisfazendo determinadas propriedades. Por exemplo, seja *R* uma relação qualquer em um conjunto *A*. O conjunto *X* das relações de equivalência *E* que contém *R* não é vazio (porque $A \times A \in X$ ). Então, a interseção dos elementos de *X* é uma relação de equivalência que contém *R*, denominada a **relação de equivalência gerada por** *R*.
- Nem sempre a união de relações de equivalência é uma relação de equivalência.

## Classes de equivalência

Seja ~ uma relação de equivalência em um conjunto *A*. Então, para um elemento *a*, define-se $[a]$ , a classe de equivalência de *a*, como o subconjunto de *A* dado por:

- $[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$

Note-se que, pela simetria de ~, tanto faz definir como *x* ~ *a* ou como *a* ~ *x*.

## Referências


1. Thayer Watkins, *San José State University*, *Department of Economics*, *Mathematics*, *Equivalence Relations and Equivalence Classes* [em linha] (http://www.sjsu.edu/faculty/watkins/equivalence.htm)