Proporção áurea

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

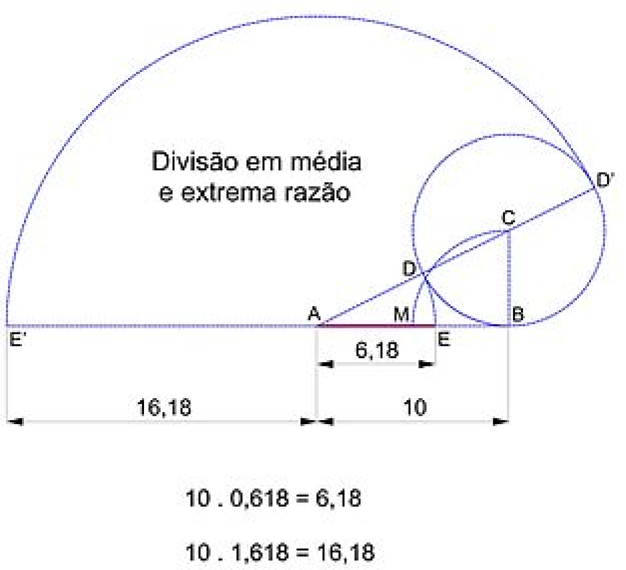
Proporção áurea, **número de ouro**, **número áureo**, **secção áurea**, **proporção de ouro** é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega ϕ (PHI), em homenagem ao escultor Phideas *(Fídias)*, que a teria utilizado para conceber o Parthenon, e com o valor arredondado a três casas decimais de 1,618. Também é chamada de **se(c)ção áurea** (do latim *sectio aurea*),[1] **razão áurea**,[2] **razão de ouro**, **média e extrema razão** *(Euclides)*, **divina proporção**, **divina seção** (do latim *sectio divina*), **proporção em extrema razão**,[3] **divisão de extrema razão** ou **áurea excelência**.[4][5] O número de ouro é ainda frequentemente chamado **razão de Phidias**.[6][7][8]

Alusão à seção áurea na estação Saldanha do metrô de Lisboa.

Desde a Antiguidade, a proporção áurea é usada na arte.[9] É frequente a sua utilização em pinturas renascentistas, como as do mestre Giotto. Este número está envolvido com a natureza do crescimento. *Phi* (não confundir com o número Pi π), como é chamado o número de ouro, pode ser encontrado de forma aproximada no homem (o tamanho das falanges, ossos dos dedos, por exemplo), nas colmeias, entre inúmeros outros exemplos que envolvem a ordem de crescimento na natureza.

Justamente por ser encontrado em estudos de crescimento, o número de ouro ganhou um status de "ideal", sendo alvo de pesquisadores, artistas e escritores. O fato de ser apoiado pela matemática é que o torna fascinante.

Índice



Divisão em média e extrema razão A partir de um segmento de 10 unidades, determina-se a sua seção áurea multiplicando-o por 0,618 (média). Para encontrar-se um segmento maior, em extrema razão, deve-se multiplicar as dez unidades iniciais por 1,618.

Propriedades matemáticas

Definição algébrica

Dois valores positivos estão em **razão áurea** se sua razão é igual à razão da sua soma pela maior das quantidades. Algebricamente, dados a e b, $a > b > 0$, então:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi.$$

Onde ϕ representa a **razão áurea**. O seu valor é constante e pode ser encontrado a partir da definição anterior

Usando a parte direita da equação, vemos que $a = b\phi$, o que pode ser substituído na parte esquerda, resultando em:

$$\frac{b\phi + b}{b\phi} = \frac{b\phi}{b}\,.$$

Cancelando b em ambos os lados, temos:

$$\frac{\phi + 1}{\phi} = \phi.$$

Multiplicando ambos os lados por ϕ, resulta:

$$\phi + 1 = \phi^2.$$

Finalmente, subtraindo ϕ^2 de ambos os membros da equação e multiplicando todas as parcelas por -1, encontramos:

$\phi^2 - \phi - 1 = 0$, que é uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a = 1,\ b = -1$ e $c = -1$.

Agora, basta resolver essa equação quadrática. Pela Fórmula de Bháskara:

$$\phi = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\phi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

A única solução positiva dessa equação quadrática é a seguinte:

$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875$, que é o número ϕ.

Sequência de Fibonacci

O número áureo está presente na fórmula do termo geral da Série de Fibonacci:

$$F(n) = \frac{\phi_+^n - \phi_-^n}{\phi_+ - \phi_-} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Representação da sequência de Fibonacci na Mole Antonelliana em Turim, Itália.

O número áureo pode ser aproximado pela divisão do n-ésimo termo da Série de Fibonacci pelo termo anterior, sendo a aproximação tanto melhor quanto maior for n. Por exemplo:

$$\frac{2}{1} = 2;\ \frac{3}{2} = 1,5;\ \frac{8}{5} = 1,6;\ \frac{13}{8} = 1,625;$$
$$\frac{89}{55} = 1,61818...\ ;\ \frac{6765}{4181} = 1,6180339...$$

Série de frações

O número áureo também pode ser encontrado através de frações contínuas, normalmente representadas como [**a**,**b**,*c*,*d*,*e*,...], o que resulta em:[10]

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}}$$

A aproximação do número áureo vem com a quantidade de números 1 em uma representação de Série de Frações. O valor varia em torno do número áureo, sendo maior ou menor alternadamente, mas sempre se aproximando deste.

$$[1;1] = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2.$$

$$[1;1,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

$$[1;1,1,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1,666.$$

$$[1;1,1,1,1] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Um número irracional sempre pode ser aproximado por números racionais, e os convergentes da representação em fração contínua são as melhores aproximações. A aproximação é tão melhor quando se corta a expansão em um coeficiente grande; por exemplo, um boa aproximação de *π = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, ...]* é obtida ao se tomar *π ~= [3; 7, 15, 1] = 3.141592654..*. Como todos os coeficientes da fração contínua de *φ* são um, todas suas aproximações por racionais são ruins - de fato, *φ* é o pior número para ser aproximado por racionais.[10]

Série de raízes

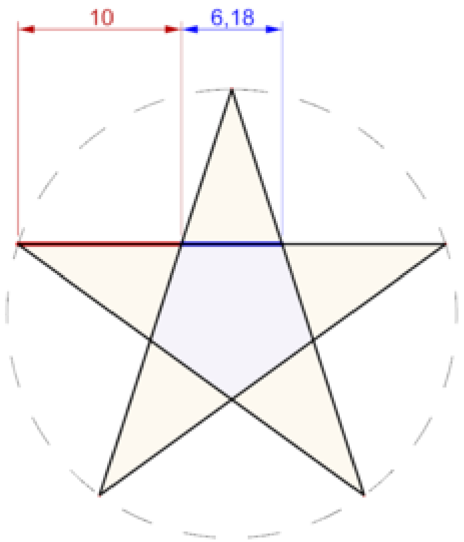
$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}$$

Proporção áurea na natureza

Figuras geométricas

Um *decágono regular*, inscrito numa circunferência, tem os lados em proporção áurea com o raio da circunferência.

Um *pentagrama regular* é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, também está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea. A razão entre as medidas das áreas dos dois pentágonos é igual a quarta potência da razão áurea.



Segmentos do pentagrama estão na proporção áurea, como mostra a figura. O pentagrama é obtido traçando-se as diagonais de um pentágono regular. O pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais, está em proporção com o pentágono maior, de onde se originou o pentagrama. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea.

Chamando os vértices de um pentagrama de A,B,C,D e E, o triângulo isósceles formado por A, C e D tem seus lados em relação dourada com a base, e o triângulo isósceles A, B e C tem sua base em relação dourada com os lados.

Quando Pitágoras descobriu que as proporções no pentagrama eram a proporção áurea, tornou esse símbolo estrelado como a representação da Irmandade Pitagórica. Esse era um dos motivos que levava Pitágoras a dizer que "tudo é número", ou seja, que a natureza segue padrões matemáticos.

Vegetais

Como os vegetais não têm formas exatas, a ponto de serem construídos com régua e compasso, a divina proporção, bem como a série Fibonacci, só podem ser encontradas por aproximação. Portanto, seria inexato atribuir correlações perfeitas entre a natureza e uma formulação idealizada pelo homem.[11][12]

Animais

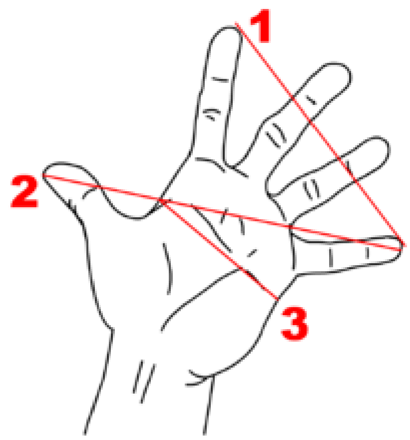
Nos animais, as medidas também são aproximadas e os desenhos e as modelagens, produzidos dentro desse cânone ideal, são criações exclusivas de artistas, "designers", ilustradores, escultores, entre outros.[11][12]

Corpo humano

- A altura do corpo humano e a medida do umbigo até o chão.
- A altura do crânio e a medida da mandíbula até o alto da cabeça.
- A medida da cintura até a cabeça e o tamanho do tórax.
- A medida do ombro à ponta do dedo e a medida do cotovelo à ponta do dedo.
- O tamanho dos dedos e a medida da dobra central até a ponta.
- A medida da dobra central até a ponta dividido e da segunda dobra até a ponta.
- A medida do seu quadril ao chão e a medida do seu joelho até o chão.

Essas proporções anatómicas **ideais** foram representadas pelo "Homem Vitruviano", obra de Leonardo Da Vinci.

- Dimensão do útero em mulheres jovens (16 e 20 anos), segundo o pesquisador Jasper Verguts, da Universidade de Leuven.[13]



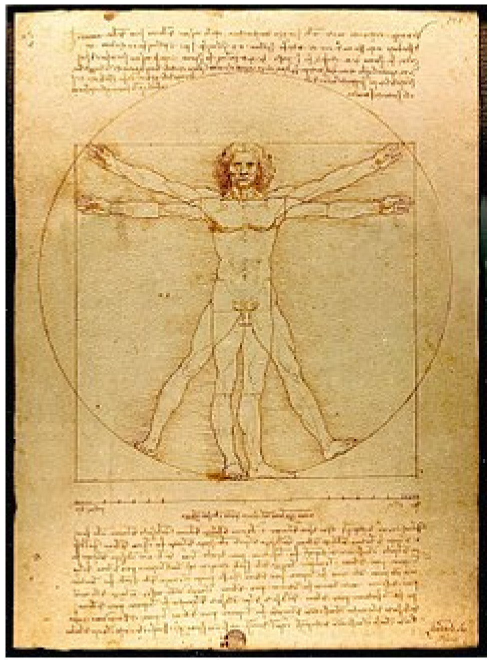
Proporções áureas em umamão.

Aplicações

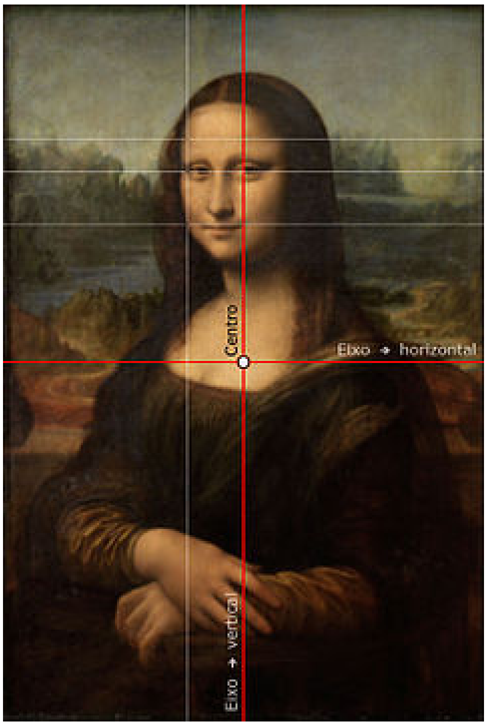
O homem, em muitas ocasiões, tem buscado o ideal da perfeição nas linguagens artísticas.

Arte

A proporção áurea foi muito usada na arte, em obras como O Nascimento de Vênus, quadro de Botticelli, em que Afrodite está na proporção áurea. Essa proporção estaria ali aplicada pelo motivo de o autor representar a perfeição da beleza.



O Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci. As ideias de proporção e simetria aplicadas à concepção da beleza humana.



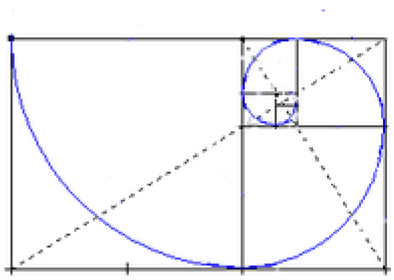
As linhas vermelhas representam os eixos vertical e horizontal. As linhas brancas são divisões áureas. Os olhos e a boca estão posicionados nessa estrutura geométrica.[14]

Em O Sacramento da Última Ceia, de Salvador Dalí, as dimensões do quadro (aproximadamente 270 cm × 167 cm) estão numa Razão Áurea entre si. Na história da arte renascentista, a perfeição da beleza em quadros foi bastante explorada com base nessa constante. Vários pintores e escultores lançaram mão das possibilidades que a proporção lhes dava para retratar a realidade com mais perfeição.

A Mona Lisa, de Leonardo da Vinci, tem a proporção áurea nas relações entre o tronco e a cabeça, bem como nos elementos da face, mas isso é uma característica inerente ao ser humano e tais proporções podem ser encontradas na maioria das pinturas em que a anatomia tenha sido respeitada.[15] Medições feitas por computador mostraram que os olhos de Mona Lisa estão situados em subdivisões áureas da tela.[14]

Retângulo dourado

Em geometria, o **retângulo de ouro** surge do processo de divisão em média e extrema razão, de Euclides. Ele é assim chamado porque ao dividir-se a base desse retângulo pela sua altura, obtêm-se o número de ouro **1,618**.[16]



Proporção áurea emretângulos.

Música

O número de ouro está presente em diversas obras de compositores clássicos, sendo o exemplo mais notável a famosa Sinfonia n.º 5, de Ludwig van Beethoven.[17] O compositor húngaro Béla Bartók também utilizou esta relação de proporcionalidade constantemente em sua obra,[18] assim como o fez o francês Claude Debussy em diversas de suas sonatas.[19]

No jazz, há músicos que usam os números da série Fibonacci na divisão rítmica e dos compassos.[20]

Literatura

No livro "O Número de Ouro", Matila Ghyka demonstrou a existência da proporção áurea em textos escritos por Victor Hugo, Shakespeare, Paul Valéry, *Pierre Louys*, entre outros. Na pesquisa, Ghyka relacionou as estrofes de acordo com o ritmo da leitura, o que ele chamou de *ritmo prosódico*.[21]

Cinema

O diretor russo *Sergei Eisenstein* utilizou o número ϕ no filme *O Encouraçado Potemkin* para marcar os inícios de cenas importantes da trama, medindo a razão pelo tamanho das fitas de película.

Nos dias atuais

A proporção áurea é utilizada como referência para o desenvolvimento de logótipos, materiais gráficos e obras audiovisuais[22], por muitos "designers" e diretores de arte.

Proporção Áurea e Regra dos Terços

É muito comum, dentro da área audiovisual e fotografia, utilizar-se a regra dos terços, porém muito se defende a substituição dessa técnica pela Proporção Áurea[23], já que por sua vez a regra do ponto de ouro é intrínseca à natureza e superior à regra dos terços primária, como descrito pelo fotógrafo britânico Jon Sparkman[24]

Linha do tempo

Linha do tempo baseada nos estudos de Priya Hemenway:[25]

- Phidias (490–430 a.C.) projetou o Partenon que contém proporções áureas.
- Platão (427–347 a.C.), no seu *Timeu*, descreveu os sólidos platônicos: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro. Podem ser encontradas proporções áureas em partes dos sólidos.[26]
- Euclides (325–265 a.C.), em sua obra *Os Elementos*, registrou a construção geométrica divisão em média e extrema razão (em grego: ἄκρος καὶ μέσος λόγος).[27]
- Fibonacci (1170–1250) mencionou a sequência numérica conhecida como Sequência de Fibonacci, que são aproximações do número de ouro.
- Luca Pacioli (1445–1517) estudou a "divina proporção" em sua obra de mesmo nome. O termo foi sugerido por Leonardo Da Vinci.
- Michael Maestlin (1550–1631) publicou a fração decimal do número de ouro.
- Johannes Kepler (1571–1630) provou que a proporção áurea é o limite da relação entre os números consecutivos da série Fibonacci[28] e descreveu a proporção áurea como uma "joia preciosa": "A geometria tem dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras, e o outro é a divisão áurea".
- Charles Bonnet (1720–1793) apontou a presença da série Fibonacci nas espirais logarítmicas presentes nas plantas, tanto no sentido horário, como no anti-horário.
- Martin Ohm (1792–1872) acredita-se ter sido o primeiro a usar o termo "segmento áureo" para descrever essa relação, em 1835.[29]
- Édouard Lucas (1842–1891) deu à sequência numérica o nome de Série de Fibonacci.
- Mark Barr (século XX) sugeriu a letra grega phi (φ), que era a letra inicial do nome do escultor grego Fídias, para simbolizar a proporção áurea.[30]

Referências

1. Summerson John, *Heavenly Mansions: And Other Essays on Architecture* (New York: W.W. Norton, 1963) p. 37. "E o mesmo se aplica em arquitetura, aos retângulos que representam estas e outras proporções (e.g. a 'seção áurea')."
2. Livio, Mario (2002). *The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number* (http://books.google.com/books?id=w9dmPwAACAAJ). New York: Broadway Books. ISBN 0-7679-0815-5
3. Euclid, *Elements (http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html)*, Book 6, Definition 3.

4. Piotr Sadowski, *The Knight on His Quest: Symbolic Patterns of Transition in Sir Gawain and the Green Knight*, Cranbury NJ: Associated University Presses, 1996
5. Richard A Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing, 1997
6. Jay Hambidge, *Dynamic Symmetry: The Greek Vase*, New Haven CT: Yale University Press, 1920
7. William Lidwell, Kritina Holden, Jill Butler, *Universal Principles of Design: A Cross-Disciplinary Reference*, Gloucester MA: Rockport Publishers, 2003
8. Pacioli, Luca. *De divina proportione*, Luca Paganinem de Paganinus de Brescia (Antonio Capella) 1509, Venice.
9. György Dóczi (1981). *O Poder dos limites: harmonias e proporções na natureza, arte & arquitetura*. [S.l.]: Shambhala. Capítulo IV
10. Kiritchenko, Valentina, *Continued Fractions*, p.12 [em linha] (http://www.math.jacobs-university.de/timorin/PM/continued_fractions.pdf)
11. György Dóczi (1981). «O Poder dos limites» (http://www.amazon.com/Power-Limits-Proportional-Harmonies-Architecture/dp/1590302591/ref=la_B000APUERE_1_1/179-3359171-2759367?s=books&ie=UTF8&qid=1404760723&sr=1-1). Amazon.com. Consultado em 7 de julho de 2014.
12. Robert Lamb. «How are Fibonacci numbers expressed in nature?» (http://science.howstuffworks.com/math-concepts/fibonacci-nature1.htm). Howstuffworks.com. Consultado em 7 de julho de 2014.
13. ABC.es. Él número áureo, descubierto en el útero (http://www.abc.es/20120816/ciencia/abci-numero-aureo-descubierto-utero-201208161416.html) Acesso 16 de agosto de 2012.
14. Denis Mandarino (27 de agosto de 2011). «A divisão áurea por detrás do olhar de Mona Lisa» (https://web.archive.org/web/20150724161835/http://www.aloartista.net/conteudo.asp?id=1692). Portal Alô Artista. Consultado em 31 de junho de 2012. Verifique data em: `|acessodata=` (ajuda)
15. Ostrower, Fayga (1983). *Universos da Arte*. [S.l.]: Campus
16. Putnoki, José Carlos - Elementos de Geometria e desenho geométrico. Vol. 1. Ed. Scipione, São Paulo, 1989. p. 140.
17. Haylock, Derek. *Mathematics Teaching, Volume 84*, p. 56-57. 1978
18. Ernö Lendvai - *Béla Bartók: An Analysis of his Music*
19. Roy Howat - *Debussy in Proportion*
20. Steve Coleman. «The Dozens» (http://www.jazz.com/dozens/the-dozens-steve-coleman-on-charlie-parker). Jazz.com. Consultado em 14 de janeiro de 2014.
21. Matila Ghyka (1984). *El número de oro*. [S.l.]: Poseidon
22. Nerival Ferraz (03 de novembro de 2016). «Finalmente! Aprenda a aplicar Proporção Áurea» (http://designculture.com.br/finalmente-aprenda-a-aplicar-proporcao-aurea). http://designculture.com.br. Consultado em 03 de novembro de 2016. Verifique data em: `|acessodata=, |data=` (ajuda)
23. Ruca Souza (25 de janeiro de 2017). «Por que a Proporção Áurea é a melhor do que a Regra dos Terços» (http://iphotochannel.com.br/dicas-de-fotografia/por-que-a-proporcao-aurea-e-melhor-do-que-a-regra-dos-tercos). http://iphotochannel.com.br. Consultado em 25 de janeiro de 2017.
24. Jon Sparkman (03 de outubro de 2016). «Por que a relação de ouro é melhor do que a regra de terceiros» (http://www.sparkman.co.uk/blog/why-the-golden-ratio-is-better-than-the-rule-of-thirds). http://sparkman.co.uk. Consultado em 03 de outubro de 2016. Verifique data em: `|acessodata=, |data=` (ajuda)
25. Hemenway, Priya (2005). *Divine Proportion: Phi In Art, Nature, and Science*. Nova Iorque: Sterling. pp. 20–21. ISBN 1-4027-3522-7
26. Platão (360 BC) (Benjamin Jowett trans.). «Timaeus» (http://classics.mit.edu/Plato/timaeus.html). The Internet Classics Archive. Consultado em 30 de maio de 2006. Verifique data em: `|ano=` (ajuda)
27. «O número de ouro» (http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-math-br.html). Universidade Federal Fluminense. Consultado em 23 de junho de 2016.
28. James Joseph Tattersall (2005). *Elementary number theory in nine chapters* (http://books.google.com/?id=QGgLbf2oFUYC&pg=PA29&dq=golden-ratio+limit+fibonacci+ratio+kepler&q=golden-ratio%20limit%20fibonacci%20ratio%20kepler) 2nd ed. [S.l.]: Cambridge University Press. p. 28. ISBN 978-0-521-85014-8
29. Underwood Dudley (1999). *Die Macht der Zahl: Was die Numerologie uns weismachen will* (http://books.google.com/?id=r6WpMO_hREYC&pg=PA245&dq=%22goldener+Schnitt%22+ohm) [S.l.]: Springer. p. 245. ISBN 3-7643-5978-1
30. Cook, Theodore Andrea (1979) [1914]. *The Curves of Life* (http://books.google.com/?id=ea-TStM-07EC&pg=PA420&dq=phi+mark+barr+intitle:The+intitle:Curves+intitle:of+intitle:Life). Nova Iorque: Dover Publications. ISBN 0-486-23701-X

Bibliografia

- Cole, K. C.. *O Universo e a Xícara de Chá*. São Paulo: Record, 2006. 294p.
- Doczi, György. *O Poder dos limites*. São Paulo: Mercuryo, 1990.
- Livio, Mario. *Razão áurea: a história do phi*. São Paulo: Record, 2006. 336p.

Ver também

- Divisão em média e extrema razão
- Número de Fibonacci
- Phi

- Regra dos terços
- Retângulo de ouro

Ligações externas

- Goldennumber.net - *The "phinest" information on the Golden Section* (em inglês)
- Fibonacci Numbers and The Golden Section in Art, Architecture and Music (em inglês)
- Constantes PHI, PI e E

Obtida de "https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Proporção_áurea&oldid=53499118"