WIKIPÉDIA

Número racional

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Em Matemática, um **Número racional** é todo número que pode ser representado por uma razão ou fração *a*/*b* de dois números inteiros, um numerador *a* e um denominador não nulo *b*. Podemos considerar que todos os números inteiros também são racionais, bastando tomar *b* igual a 1.

O conjunto dos números racionais, representado por $\mathbb{Q}$, é definido por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Em outras palavras, o conjunto dos números racionais é formado por todos os quocientes de números inteiros a e b, em que b é não nulo, pois, matematicamente, dividir por zero é considerado um erro ou uma indefinição.

Números racionais podem ser formalmente definidos como classes de equivalência do par de inteiros (a, b) em que $b \neq 0$, para a relação de equivalência definida por $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ se, e somente se, $a_1 b_2 = a_2 b_1$.

Os números racionais junto com a adição e a multiplicação formam um campo que contém os inteiros e é contido por qualquer campo que contém os inteiros. Extensões finitas de $\mathbb{Q}$ são chamadas de campos de números algébricos, e o fechamento algébrico de $\mathbb{Q}$ é o campo dos números algébricos.

Em análise matemática, os números racionais formam um subconjunto denso dos números reais. Os números reais podem ser construídos a partir dos números racionais por complementação, usando as sequências de Cauchy, cortes de Dedekind, ou decimais infinitos.

O uso da letra "Q" é derivado da palavra latina *quotiē(n)s* [1], cujo significado é quantas vezes.

São exemplos de números racionais: $-\frac{6}{7},\ 3\frac{5}{8},\ 7{,}5,\ \frac{1}{2}$

Conjuntos de números

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \cdots$

Naturais $\mathbb{N}$
Inteiros $\mathbb{Z}$
Racionais $\mathbb{Q}$
Reais $\mathbb{R}$
Imaginários
Complexos $\mathbb{C}$
Números hiper-reais
Números hipercomplexos

Quaterniões $\mathbb{H}$
Octoniões $\mathbb{O}$
Sedeniões $\mathbb{S}$
Complexos hiperbólicos $\mathbb{R}^{1,1}$
Quaterniões hiperbólicos
Bicomplexos
Biquaterniões
Coquaterniões
Tessarines

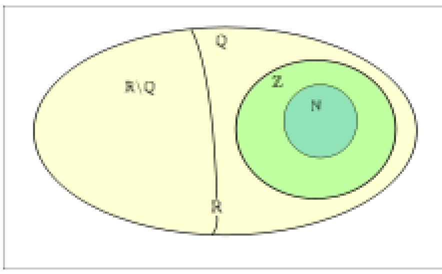


Diagrama de alguns subconjuntos de números reais.

Há quatro formas de se apresentarem os números racionais: Frações (próprias ou impróprias), números mistos (que é uma variação das frações impróprias), números decimais de escrita finita e, por fim, as dízimas periódicas, que são números decimais em cuja escrita aparecem períodos numéricos que se repetem infinitamente. Exemplos:

- **Fração:** $\frac{1}{4}$.
- Na Fração $\frac{a}{b}$, a é o numerador e b o denominador. Se a e b são primos entre si, isto é, se $mdc(a,b) = 1$, dizemos que essa fração é irredutível.
- **Numeral misto:** $1\frac{2}{3}$
- **Números decimais de escrita finita:** $4,5$
- **Dízimas periódicas:** $0,333...$ **ou** $0,\overline{3}$

Índice

Subconjuntos de $\mathbb{Q}$: [2]

- $\mathbb{Q}^*$: conjuntos dos racionais não nulos.
- $\mathbb{Q}_+$: conjuntos dos racionais não negativos.
- $\mathbb{Q}_+^*$: conjuntos dos racionais positivos.
- $\mathbb{Q}_-$: conjuntos dos racionais não positivos.
- $\mathbb{Q}_-^*$: conjunto dos racionais negativos.

Propriedades de $\mathbb{Q}$:

Sejam $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f} \in \mathbb{Q}$.

Adição

- 1. $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$ (associativa)
  2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ (comutativa)
  3. $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$ (elemento neutro da soma)
  4. $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$ (simétrico para a adição)

Multiplicação

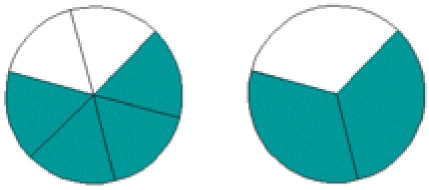
- 1. $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$ (associativa)

2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$ (comutativa)
3. $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$ (elemento neutro da multiplicação)
4. $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$ (distributiva)
5. $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\neq 0$, existe $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. (simétrico para a multiplicação)

Com isso, podemos definir em $\mathbb{Q}^*$ a **divisão**, tal que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, para $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \neq 0$.

Equivalência de frações

$\frac{4}{6}$ é o mesmo que $\frac{2}{3}$?



Não, essas frações na verdade representam quantidades iguais, ou seja, são equivalentes.

Quando os denominadores são iguais é fácil identificar se as quantidades representadas por duas frações são iguais, pois

$$quant\left\{\frac{2}{5}\right\} = quant\left\{\frac{2}{5}\right\}$$

$$quant\left\{\frac{4}{3}\right\} \neq quant\left\{\frac{5}{3}\right\}$$

Agora, quando os denominadores não são iguais usamos a seguinte definição:

Sendo $a, b \neq 0$ e $A, B \neq 0$ números inteiros, dizemos que as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{A}{B}$ são frações equivalentes, o que denotamos por:

$$quant\left\{\frac{a}{b}\right\} = quant\left\{\frac{A}{B}\right\}$$

Quando, e somente quando, tivermos $a \cdot B = b \cdot A$, ou seja

$$quant\left\{\frac{a}{b}\right\} = quant\left\{\frac{A}{B}\right\} \iff \frac{a}{b} = \frac{A}{B} \iff a \cdot B = b \cdot A$$

Exemplos:

- $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} \cdots$
- $\frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \cdots$
- $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{16}{12} \cdots$

Propriedades de equivalência de frações

1. $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ (reflexiva)
2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ (simétrica)

3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ (transitiva)

Classe de frações

[3]A classe de equivalência de uma fração é o conjunto de todas as frações equivalentes à fração dada. Usualmente trabalhamos com a fração irredutível deste conjunto. A cada classe de equivalência de fração associamos um número racional.

Classe significa o mesmo que conjunto e é usada quando um conjunto de objetos matemáticos são, de alguma maneira, todos equivalentes entre si.

Exemplo: $r = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6} \cdots\right\}$, neste caso $r = 0,5$

O número zero racional consiste na classe $\left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \cdots \frac{0}{-1}, \frac{0}{-2}, \cdots\right\}$. Ele é o único número racional que tem representações fracionárias, tanto com numerador e denominador de sinais iguais, como de sinais opostos.

Ordenação dos racionais[4]

A relação de ordem entre números racionais sempre é estabelecida a partir de representações fracionárias de denominadores positivos.

Dados dois números racionais $r = \frac{a}{b}$ e $s = \frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d > c \cdot b$$

Teorema:

O corpo $[\mathbb{Q}, +, \cdot, <]$ tem a estrutura de corpo ordenado, ou seja, é um corpo no qual a relação de ordem verifica as duas seguintes propriedades:

Sendo $r, s, t \in \mathbb{Q}$

1. $$r < s \Longleftrightarrow r + t < s + t \qquad \forall \quad t \in \mathbb{Q}$$
   $$(\Leftarrow) r + t + (-t) < s + t + (-t)$$
   $$r + 0 < s + 0$$
   $$r < s$$
2. $$r < s \Longleftrightarrow r \cdot t < s \cdot t \qquad \forall \quad t > 0$$
   $$(\Leftarrow) r \cdot t \cdot \frac{1}{t} < s \cdot t \cdot \frac{1}{t}$$
   $$r \cdot \frac{t}{t} < s \cdot \frac{t}{t}$$
   $$r < s$$

Propriedade arquimediana em $\mathbb{Q}$

Dado um número racional $\alpha > 0$, para cada escolha de $r \in \mathbb{Q}$, sempre é possível encontrar $m \in \mathbb{N}$, tal que $r < m \cdot \alpha$

$r = \frac{8}{3}$ e $\alpha = \frac{1}{2}$, onde m é o menor possível.

$\frac{8}{3} < m \cdot \frac{1}{2}$

$(2) \cdot \frac{8}{3} < m \cdot \frac{1}{2} \cdot (2)$

$\frac{16}{3} < m \cdot \frac{2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{3} < m$

Sabemos então que quando $m = \frac{16}{3}$, $m \cdot \alpha = r_1$, porém não temos como determinar o menor racional que seja maior que $\frac{16}{3}$. Então basta tomarmos um $m > \frac{16}{3}$. Por exemplo: $\frac{17}{3}$.

$\frac{8}{3} < \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{8}{3} < \frac{17}{6}$

Densidade dos racionais

Um conjunto $\mathbb{A}$ de números racionais é dito denso (em $\mathbb{Q}$) se entre dois quaisquer elementos distintos de $\mathbb{Q}$ existam infinitos elementos de $\mathbb{A}$, ou seja, entre os dois elementos de $\mathbb{Q}$ dados, existam infinitos intermediários que estão em $\mathbb{A}$.

Teorema:

A média aritmética de quaisquer dois números racionais sempre é um número intermediário entre eles. Se $r < s \in \mathbb{Q}$.

Hipótese: $r < s$.

Tese: $r < \frac{r+s}{2} < s$

Temos que $r + r = 2r$ e $s + s = 2s$

Então, $2r < r + s < 2s$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2r < \frac{1}{2} \cdot (r+s) < \frac{1}{2} \cdot 2s$

$\Rightarrow \frac{2}{2}r < \frac{r+s}{2} < \frac{2}{2}s$

$\Rightarrow r < \frac{r+s}{2} < s$

Representação decimal

Podemos passar um número racional $\frac{a}{b}$ para a forma decimal dividindo o inteiro a pelo inteiro b, com isso podemos obter dois casos:

1. Um número decimal que tem uma quantidade finita de algarismos, diferentes de zero, isto é, uma decimal exata. Exemplos: $\frac{5}{1} = 5$, $\frac{1}{20} = 0,05$ e $\frac{27}{1000} = 0,027$
2. Um número decimal que tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, uma dízima periódica. Exemplos:
   - $\frac{1}{3} = 0,333\cdots = 0,\bar{3} \quad \Rightarrow$ dízima periódica simples
   - $\frac{2}{7} = 0,285714285714\cdots = 0,\overline{285714} \quad \Rightarrow$ dízima periódica simples
   - $\frac{11}{6} = 1,8333\cdots = 1,8\bar{3} \quad \Rightarrow$ dízima periódica composta

Todo número na forma de decimal exata ou de dízima periódica pode ser convertido à forma de fração $\frac{a}{b}$, portanto, representa um número racional.

Quando a decimal é exata, podemos escrevê-lo em forma de fração, cujo numerador é o numeral decimal sem a vírgula, e cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado. Exemplo:

- $0,37 = \frac{37}{100}$
- $2,631 = \frac{2631}{1000}$

Quando a decimal é uma dízima periódica, temos que procurar sua geratriz. Exemplos:

1. $0,777\cdots$
   - $\left.\begin{array}{r} x = 0,777\cdots \\ 10x = 7,777\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow 10x - x = 7,777 - 0,777 \Rightarrow 9x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$
2. $6,4343\cdots$
   - $\left.\begin{array}{r} x = 6,434343\cdots \\ 100x = 643,434343\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow 100x - x = 643 - 6 \Rightarrow 99x = 637 \Rightarrow x = \frac{637}{99}$
3. $2,57919191\cdots$
   - $x = 2,57919191\cdots$
   - $\left.\begin{array}{r} 100x = 257,919191\cdots \\ 10000x = 25791,919191\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow 10000x - 100x = 25791 - 257 \Rightarrow 9900x = 25534 \Rightarrow x = \frac{25534}{9900}$

Referências

1. Diccionario básico Latino Español/ Español latino. ISBN 84-7153-223-9
2. Iezzi, Gelson (2004). *Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos e funções*. São Paulo: Atual. ISBN 9788535704556
3. «classe de equivalência de frações» (http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Cavalieri.pdf) (PDF). Consultado em 22 de agosto de 2016
4. Ripoll, Cydara Cavedon (2011). *Números Racionais, Reais e Complexos*. Porto Alegre: UFRGS. ISBN 9788538601289

A Wikipédia tem o portal:

Matemática