WIKIPÉDIA

Desigualdade das médias

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

A **desigualdade das médias** afirma que a média aritmética é maior ou igual à média geométrica e esta maior ou igual à média harmônica.

Mais precisamente falando, seja $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ um conjunto não vazio de números reais positivos então:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

onde $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, veja somatório.

e $\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$, veja produtório.

Índice

Demonstração do caso n=2

Queremos mostrar que:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$$

Como x_1 e x_2 são reais, temos:

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

Expandindo, temos:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0$$

Somando $4x_1x_2$, obtemos:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 4x_1x_2$$

Reagrupando:

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2$$

Como são números positivos, podemos tomar a raiz quadrada e dividir por 2:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$$

A primeira desigualdade segue. Para mostrar a segunda, escreva esta última como:

$$\frac{2}{x_1 + x_2} \leq \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}$$

Multiplique ambos os lados por x_1x_2:

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1x_2}$$

E observe que esta é justamente a desigualdade que procuramos, pois:

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{2}{\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}} = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$$

E o resultado segue.

Demonstração no caso $n = 2^k$

Queremos a igualdade para$n = 2^k$, com **k** inteiro positivo.

Procederemos porindução em **k**: O caso k=1, já foi demonstrado.

Suponha então que a desigualdade é valida para um certo **k** positivo, escreva para$n = 2^k$:

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i = \frac{1}{2n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i\right]$$

Aplique a desigualdade da média com dois elementos:

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i \geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot\left(\sum_{i=n+1}^{2n} x_i\right)}$$

Agora, aplique a desigualdade para **n** elementos em cada um dos termos:

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i \geq \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i}}$$

E assim, conclua:

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i \geq \sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i}$$

E a primeira desigualdade segue pois $2n = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

Usemos o mesmo procedimento para demonstrar a segunda desigualdade:

$$\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i} = \sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \cdot \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i}}$$

$$\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i} \geq \frac{2}{\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}} + \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i}}}$$

$$\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i} \geq \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{x_i}}$$

$$\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i} \geq \frac{2n}{\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{x_i}}$$

E a segunda desigualdade segue.

Demonstração do caso geral

Completaremos a demonstração, mostrando que se a desigualdade for válida para **n** termos, então também é válida para **n-1** termos.

Suponha, então, que a desigualdade é válida para um número inteiro **n** maior que 1, ou seja:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}\right)}$$

Escreva:

- $p = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i$
- $q = \sqrt[n-1]{\prod_{i=1}^{n-1} x_i}$
- $r = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}\right)}$

Queremos mostrar que $p \geq q \geq r$

Substitua $x_n = q$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + q\right) \geq \sqrt[n]{q\prod_{i=1}^{n-1} x_i} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}\right) + \frac{1}{q}}$$

Observe que:

$$\sqrt[n]{q\prod_{i=1}^{n-1} x_i} = \sqrt[n]{qq^{n-1}} = q$$

Assim temos, da primeiradesigualdade:

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + q\right) \geq q$$

Rearranjando, temos:

$$p = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i \geq q$$

A segunda desigualdade diz:

$$q \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}\right) + \frac{1}{q}}$$

O que equivale a:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}\right) + \frac{1}{q} \geq \frac{n}{q}$$

ou:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}\right) \geq \frac{n-1}{q}$$

Equivalente a:

$$q \geq \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}\right)} = r$$

O que completa a demonstração.

Desigualdade entre as Médias Quadrática e Aritmética

Se, na desigualdade de Cauchyfizermos $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_n = 1$, ela assume a forma:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2 + \ldots + {a_n}^2}\sqrt{n}$$

Agora é só dividir os membros da desigualdade acima por n.
Finalmente:

$$\sqrt{\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\ldots+{a_n}^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

Ver também

- Desigualdade